

Ejercicios de lógica. Derivaciones.

$$1) p \quad \vdash p \vee q$$

2.- $p \vee q$ _____ *Ad. 1*

$$1) p \quad \vdash p \vee (q \wedge r)$$
$$2.- p \vee (q \wedge r) \underline{\hspace{2cm}} Ad. 1$$
$$1) p \qquad \vdash p \vee (q \rightarrow s)$$
$$2.- p \vee (q \rightarrow s) \qquad \text{Ad. 1}$$
$$1) p \qquad \vdash p \vee [q \rightarrow (s \wedge \neg(p \wedge \neg t))]$$
$$2.- p \vee [q \rightarrow (s \wedge \neg(p \wedge \neg t))]$$

Ad. 1

$$1) q \wedge r \qquad \vdash (q \wedge r) \vee p$$
$$2.- (q \wedge r) \vee p \text{ ----- } Ad. 1$$
$$1) p \rightarrow q \qquad \vdash (p \rightarrow q) \vee p$$

2.- $(p \rightarrow q) \vee p$ _____ *Ad. 1*

$$1) p \rightarrow q \qquad \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \wedge s)$$
$$2.- (p \rightarrow q) \vee (p \wedge s) \text{ ----- } Ad. 1$$
$$1) \quad p \wedge q \qquad \vdash p$$

2.- p _____ *Simp. 1*

$$1) p \wedge (s \rightarrow t) \quad \vdash p$$

2.- p _____ *Simp. 1*

$$1) p \wedge (s \rightarrow t) \quad \vdash s \rightarrow t$$
$$2.- s \rightarrow r \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } Simp. 1$$
$$1) p \wedge q \quad \vdash q \wedge r$$

2) r

3.- q _____ *Simp. 1*

$$4.- q \wedge r \quad \text{Prod. 2, 3}$$

NIVEL PRINCIPIANTE

1) $p \wedge q$ $\vdash q \wedge r$
 2) $r \wedge s$

3.- q *Simp. 1*
 4.- r *Simp. 2*
 5.- $q \wedge r$ *Prod. 3, 4*

1) p $\vdash p \wedge q$
 2) q

3.- $p \wedge q$ *Prod. 1, 2*

1) p $\vdash p \wedge r$
 2) $q \wedge r$

3.- r *Simp. 2*
 4.- $p \wedge r$ *Prod. 1, 3*

1) $p \rightarrow q$ $\vdash q$
 2) p

3.- q *MP, 1, 2*

1) $p \rightarrow q$ $\vdash q$
 2) $p \wedge q$

3.- p *Simp. 2*
 4.- q *MP. 1, 3*

1) $p \rightarrow (q \wedge r)$ $\vdash q$
 2) p

3.- $q \wedge r$ *MP. 1, 2*
 4.- q *Simp. 3*

1) $(p \wedge q) \rightarrow r$ $\vdash r$
 2) p
 3) q

4) $p \wedge q$ *Prod. 2, 3*
 5) r *MP. 1, 4*

1) $(p \wedge q) \rightarrow r$ $\vdash r \vee s$
 2) p
 3) q

4.- $p \wedge q$ *Prod. 2, 3*
 5.- r *MP. 1, 4*
 6.- $r \vee s$ *Ad. 5*

NIVEL PRINCIPIANTE

1) $(p \vee q) \rightarrow r$ $\vdash r$
 2) p

3.- $p \vee q$ Ad. 2
 4.- r MP. 1, 3

1) $(p \vee q) \rightarrow r$ $\vdash r$
 2) p

3.- $p \vee q$ Ad. 2
 4.- r MP. 1, 3

1) $p \rightarrow r$ $\vdash r$
 2) $q \rightarrow p$
 3) q

4.- p MP. 2, 3
 5.- r MP. 1, 4

1) $p \rightarrow q$ $\vdash q$
 2) $p \wedge r$

3.- p Simp. 2
 4.- q MP 1, 3

1) $p \rightarrow (q \wedge r)$ $\vdash q \wedge r$
 2) p

3.- $q \wedge r$ MP. 1, 2

1) $p \rightarrow (q \wedge r)$ $\vdash q \wedge r$
 2) $p \wedge q$

3.- p Simp. 2
 4.- $q \wedge r$ MP. 1, 3

1) $p \vee q$ $\vdash r$
 2) $p \rightarrow r$
 3) $q \rightarrow r$

4.- p
 5.- r MP. 2, 4
 6.- q
 7.- r MP. 3, 6
 8.- r Cas. 1, 4-5, 6-7

NIVEL PRINCIPIANTE

- 1) $p \vee q$ $\vdash r \vee s$
- 2) $p \rightarrow r$
- 3) $q \rightarrow r$

$\left[\begin{array}{l} 4.-p \\ 5.-r \end{array} \right] \text{MP. 2, 4}$
 $\left[\begin{array}{l} 6.-q \\ 7.-r \end{array} \right] \text{MP. 3, 6}$
 $8.-r \text{ Cas. 1, 4-5, 6-7}$
 $9.-r \vee s \text{ Ad. 8}$

- 1) $p \vee \neg q$ $\vdash r$
- 2) $p \rightarrow r$
- 3) $\neg q \rightarrow r$

$\left[\begin{array}{l} 4.-p \\ 5.-r \end{array} \right] \text{MP. 2, 4}$
 $\left[\begin{array}{l} 6.-\neg q \\ 7.-r \end{array} \right] \text{MP. 3, 6}$
 $8.-r \text{ Cas. 1, 4-5, 6-7}$

- 1) $(p \rightarrow s) \vee (s \rightarrow t)$ $\vdash r$
- 2) $(p \rightarrow s) \rightarrow r$
- 3) $(s \rightarrow t) \rightarrow r$

$\left[\begin{array}{l} 4.-p \rightarrow s \\ 5.-r \end{array} \right] \text{MP. 2, 4}$
 $\left[\begin{array}{l} 6.-s \rightarrow t \\ 7.-r \end{array} \right] \text{MP. 3, 6}$
 $8.-r \text{ Cas. 1, 4-5, 6-7}$

- 1) $p \vee q$ $\vdash r$
- 2) $p \rightarrow (r \wedge s)$
- 3) $q \rightarrow r$

$\left[\begin{array}{l} 4.-p \\ 5.-r \wedge s \end{array} \right] \text{MP. 2, 4}$
 $6.-r \text{ Simp. 5}$
 $\left[\begin{array}{l} 7.-q \\ 8.-r \end{array} \right] \text{MP. 3, 7}$
 $9.-r \text{ Cas. 1, 4-6, 7-8}$

NIVEL PRINCIPIANTE

- 1) $p \vee q$ $\vdash r$
 2) $p \rightarrow (r \wedge s)$
 3) $q \rightarrow (r \wedge t)$

$\left\{ \begin{array}{l} 4.-p \\ 5.-r \wedge s \end{array} \right. \text{MP. 2, 4}$
 $\left\{ \begin{array}{l} 6.-r \end{array} \right. \text{Simp. 5}$
 $\left\{ \begin{array}{l} 7.-q \\ 8.-r \wedge t \end{array} \right. \text{MP. 3, 7}$
 $\left\{ \begin{array}{l} 9.-r \end{array} \right. \text{Simp. 8}$
 $10.-r \text{ Cas. 1, 4-6, 7-9}$

- 1) $p \vee (q \wedge s)$ $\vdash r$
 2) $p \rightarrow r$
 3) $q \rightarrow r$

$\left\{ \begin{array}{l} 4.-p \\ 5.-r \end{array} \right. \text{MP. 2, 4}$
 $\left\{ \begin{array}{l} 6.-q \wedge s \\ 7.-q \end{array} \right. \text{Simp. 6}$
 $\left\{ \begin{array}{l} 8.-r \end{array} \right. \text{MP. 3, 7}$
 $9.-r \text{ Cas. 1, 4-5, 6-8}$

- 1) $p \rightarrow r$ $\vdash r$
 2) p

$3.-r \text{ MP. 1,2}$

- 1) $p \rightarrow r$ $\vdash r \wedge s$
 2) p
 3) $q \rightarrow s$
 4) q

$5.-r \text{ MP. 1, 2}$
 $6.-s \text{ MP. 3, 4}$
 $7.-r \wedge s \text{ Prod. 5, 6}$

- 1) $p \wedge q$ $\vdash r \wedge s$
 2) $p \rightarrow r$
 3) $q \rightarrow s$

$4.-p \text{ Simp. 1}$
 $5.-q \text{ Simp. 1}$
 $6.-r \text{ MP. 2, 4}$
 $7.-s \text{ MP. 3, 5}$
 $8.-r \wedge s \text{ Prod. 6, 7}$

NIVEL PRINCIPIANTE

- 1) $p \vee q$ $\vdash r$
- 2) $p \rightarrow r$
- 3) $q \rightarrow r$

(Resuelto más arriba)

- 1) p $\vdash r$
- 2) $(p \vee q) \rightarrow r$

3.- $p \vee q$ Ad. 1
 4.- r MP. 2, 3

- 1) $p \vee q$ $\vdash r$
- 2) $p \rightarrow r$
- 3) $(q \vee s) \rightarrow r$

4.- p
 5.- r MP. 2, 4
 6.- q
 7.- $q \vee s$ Ad. 6
 8.- r MP. 3, 7
 9.- r Cas. 1, 4-5, 6-8

- 1) p $\vdash q$
- 2) $\neg p$

3.- $\neg q$
 4.- $p \wedge \neg p$ Prod. 1, 2
 5.- $\neg \neg q$ Abs. 3-4
 6.- q DN, 5

- 1) $p \wedge q$ $\vdash r$
- 2) $\neg(p \wedge q)$

3.- $\neg r$
 4.- $(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)$ Prod. 1, 2
 5.- $\neg \neg r$ Abs. 3-4
 6.- r DN, 5

- 1) $p \rightarrow q$ $\vdash r$
- 2) $\neg(p \rightarrow q)$

3.- $\neg r$
 4.- $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$ Prod. 1, 2
 5.- $\neg \neg r$ Abs. 3-4
 6.- r DN, 5

NIVEL PRINCIPIANTE

- 1) $p \wedge q$ $\vdash s$
 2) $\neg p \wedge r$

$\left\{ \begin{array}{l} 3.- \neg s \\ 4.- p \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Simp. 1} \\ 5.- \neg p \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Simp. 2} \\ 6.- p \wedge \neg p \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Prod. 4, 5} \\ 7.- \neg \neg s \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Abs. 3-6} \\ 8.- s \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{DN, 7} \end{array} \right.$

- 1) $p \rightarrow q$ $\vdash s$
 2) p
 3) $r \rightarrow \neg q$
 4) r

$\left\{ \begin{array}{l} 5.- \neg s \\ 6.- q \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{MP. 1, 2} \\ 7.- \neg q \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{MP. 3, 4} \\ 8.- q \wedge \neg q \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Prod. 6, 7} \\ 9.- \neg \neg s \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Abs. 5-8} \\ 10.- s \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{DN. 9} \end{array} \right.$

- 1) $p \wedge q$ $\vdash r \vee t$
 2) $\neg p \wedge s$

$\left\{ \begin{array}{l} 3.- \neg(r \vee t) \\ 4.- p \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Simp. 1} \\ 5.- \neg p \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Simp. 2} \\ 6.- p \wedge \neg p \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Prod. 4, 5} \\ 7.- \neg \neg(r \vee t) \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Abs. 3-6} \\ 8.- r \vee t \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{DN. 7} \end{array} \right.$

- 1) p $\vdash (r \rightarrow q)$
 2) $\neg p$

$\left\{ \begin{array}{l} 3.- \neg(r \rightarrow q) \\ 4.- p \wedge \neg p \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Prod. 1, 2} \\ 5.- \neg \neg(r \rightarrow q) \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Abs. 3-4} \\ 6.- r \rightarrow q \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{DN, 5} \end{array} \right.$

- 1) $p \wedge s$ $\vdash r$
 2) $\neg s$

$\left\{ \begin{array}{l} 3.- \neg r \\ 4.- s \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Simp. 1} \\ 5.- s \wedge \neg s \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Prod. 2, 4} \\ 6.- \neg \neg r \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{Abs. 3-5} \\ 7.- r \text{ } \underline{\hspace{1cm}} \text{ } \textit{DN, 6} \end{array} \right.$

NIVEL PRINCIPIANTE

1) p $\vdash r \rightarrow [s \vee (p \wedge q)]$
 2) $\neg p$

3.- $\neg[r \rightarrow [s \vee (p \wedge q)]]$
 4.- $p \wedge \neg p$ Prod. 1, 2
 5.- $\neg\neg[r \rightarrow [s \vee (p \wedge q)]]$ Abs. 3-4
 6.- $r \rightarrow [s \vee (p \wedge q)]$ DN, 5

1) p $\vdash p$

2.- $\neg p$
 3.- $p \wedge \neg p$ Prod. 1, 2
 4.- $\neg\neg p$ Abs. 2-3
 5.- p DN. 4

1) $\neg p$ $\vdash \neg p$

2.- p
 3.- $p \wedge \neg p$ Prod. 1, 2
 4.- $\neg p$ Abs. 2-3

1) p $\vdash q$
 2) $\neg q \rightarrow \neg p$

3.- $\neg q$
 4.- $\neg p$ MP. 2, 3
 5.- $p \wedge \neg p$ Prod. 1, 4
 6.- $\neg\neg q$ Abs. 3-5
 7.- q DN, 6

1) $p \wedge q$ $\vdash r \rightarrow q$

2.- r
 3.- q Simp. 1
 4.- $r \rightarrow q$ TD 2-3

1) $p \wedge q$ $\vdash (r \wedge s) \rightarrow q$

2.- $r \wedge s$
 3.- q Simp. 1
 4.- $(r \wedge s) \rightarrow q$ TD, 2-3

NIVEL PRINCIPIANTE

$$1) p \wedge q \quad \vdash r \rightarrow (q \vee s)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.-r \\ 3.-q \quad \text{Simp. 1} \\ 4.-q \vee s \quad \text{Ad. 3} \\ 5.-r \rightarrow (q \vee s) \quad \text{TD, 2-4} \end{array} \right.$$

$$1) p \wedge q \quad \vdash (r \wedge s) \rightarrow (q \vee r)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.- (r \wedge s) \\ 3.-q \quad \text{Simp. 1} \\ 4.-q \vee r \quad \text{Ad. 3} \\ 5.- (r \wedge s) \rightarrow (q \vee r) \quad \text{TD. 2-4} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 1) p \rightarrow q \\ 2) q \rightarrow r \end{array} \quad \vdash p \rightarrow r$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3.-p \\ 4.-q \quad \text{MP. 1, 3} \\ 5.-r \quad \text{MP. 2, 4} \\ 6.-p \rightarrow r \quad \text{TD. 3-5} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 1) p \rightarrow q \\ 2) q \rightarrow r \\ 3) r \rightarrow s \\ 4) s \rightarrow t \end{array} \quad \vdash p \rightarrow t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5.-p \\ 6.-q \quad \text{MP. 1, 5} \\ 7.-r \quad \text{MP. 2, 6} \\ 8.-s \quad \text{MP. 3, 7} \\ 9.-t \quad \text{MP. 4, 8} \\ 10.-p \rightarrow t \quad \text{TD 5-9} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 1) p \rightarrow q \\ 2) (q \vee r) \rightarrow t \end{array} \quad \vdash p \rightarrow t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3.-p \\ 4.-q \quad \text{MP. 1, 3} \\ 5.-q \vee r \quad \text{Ad. 4} \\ 6.-t \quad \text{MP. 2, 5} \\ 7.-p \rightarrow t \quad \text{TD 3-6} \end{array} \right.$$

NIVEL PRINCIPIANTE

- 1) $p \rightarrow q$ $\vdash (p \wedge r) \rightarrow t$
 2) $q \rightarrow t$

{	3.- $p \wedge r$	
	4.- p	<i>Simp. 3</i>
	5.- r	<i>Simp. 3</i>
	6.- q	<i>MP. 1, 4</i>
	7.- t	<i>MP. 2, 6</i>
	8.- $(p \wedge r) \rightarrow t$	<i>TD. 3-7</i>

- 1) $p \rightarrow q$ $\vdash p \rightarrow t$
 2) $q \rightarrow r$
 3) $\neg r$

{	4.- p	
	5.- $\neg t$	
	6.- q	<i>MP. 1, 4</i>
	7.- r	<i>MP. 2, 6</i>
	8.- $r \wedge \neg r$	<i>Prod. 3, 7</i>
	9.- $\neg \neg t$	<i>Abs. 5-8</i>
	10.- t	<i>DN. 9</i>
	11.- $p \rightarrow t$	<i>TD 4-10</i>

- 1) $p \rightarrow q$ $\vdash \neg p$
 2) $\neg q$

{	3.- p	
	4.- q	<i>MP. 1, 3</i>
	5.- $q \wedge \neg q$	<i>Prod. 2, 4</i>
	6.- $\neg p$	<i>Abs. 3-5</i>

El hombre es por natura la bestia paradójica,
 un animal absurdo que necesita lógica.
 Creó de nada un mundo y, su obra terminada,
 «Ya estoy en el secreto—se dijo—: todo es nada.»

Antonio Machado, [Proverbios y cantares](#).